

DINERO, PRECIOS Y TIPO DE CAMBIO EN ARGENTINA: UNA APLICACION DEL METODO DE JOHANSEN-JUSELIUS.

Alfredo M. Navarro* y Cristina L. Oppezzi**

1. INTRODUCCION.

El propósito de este trabajo es analizar la interacción del dinero, el tipo de cambio, las tasas de interés y los precios en un sistema multiecuacional que nos permita analizar tanto los elementos de corto plazo como los de largo y nos muestre como estas variables se influyen recíprocamente.

En trabajos anteriores¹, hemos estudiado algunas cuestiones relacionadas en este tema, por lo que este trabajo es la continuación de los mismos pero con una metodología diferente.

Se utiliza un sistema VAR en niveles y se detectan variables no estacionarias lo cual permitiría incluir relaciones de cointegración entre las mismas para capturar las relaciones económicas de largo plazo subyacentes en el proceso estudiado.

* Universidad Católica de La Plata. Universidad Nacional de La Plata.

** Los autores agradecen los comentarios recibidos de los doctores Julio H. G. Olivera y Walter Sosa Escudero y del Lic. Hugo Balacco.

¹ En Aubone, Navarro y Oppezzi (1988) y en Navarro (1989) hemos estudiado la relación entre dinero y precios mediante la técnica de coeficientes variables. En Navarro y Balacco (1988) y en Navarro (1992) utilizamos sistemas VAR que incluyen, entre otras, a algunas de las variables que estamos estudiando en este trabajo.

El método que aplicamos es el desarrollado por Johansen y Juselius².

En la sección II definimos el marco económico que intentaremos confrontar, en la sección III se describe el método econométrico utilizado, en la sección IV se analiza el resultado de las estimaciones y en la sección V se extraen algunas conclusiones.

II. EL MARCO ECONOMICO.

Los determinantes del tipo de cambio son importantes en la economía, pero más aún en el caso de Argentina, donde paulatinamente se ha ido sustituyendo la moneda local por el dólar estadounidense, a medida que el proceso inflacionario se va haciendo crónico y la tasa de inflación se hace más elevada y variable, hasta que en 1991 se adopta un sistema bimonetario. Dos son las fuentes que tienden a la modificación del tipo de cambio en el largo plazo que analizamos. La primera es la evolución de los precios domésticos y externos con el tipo de cambio, que a través del PPP (Purchase Parity Price), indican si el tipo de cambio se ha apartado del nivel de equilibrio. La otra es la relación entre el tipo de cambio con la diferencia en las tasas domésticas e internacionales UIP (Uncovered Interest Parity) y la cantidad de dinero. Todas las variables se influyen además recíprocamente en primeras diferencias para marcar las influencias de corto plazo.

² Una descripción completa de los fundamentos del método referido puede verse en Johansen(1995).

Esta forma de encarar el problema es similar a la que se sigue, por ejemplo, en los modelos teóricos desarrollados por Dornbusch (1976) y Frankel (1979). El primero estudia las relaciones entre el tipo de cambio y los precios domésticos respecto a los internacionales, analizando el comportamiento del tipo de cambio ante un cambio en la oferta monetaria, llegando a la conclusión que un incremento en la cantidad de dinero producirá inicialmente un desequilibrio en el mercado de dinero que provocará un aumento en el tipo de cambio nominal, permaneciendo constantes los precios domésticos. Luego, paulatinamente, a medida que cae el nivel de actividad interno se produce un ajuste en los precios, que es tanto más lento cuanto mayor es el costo de arbitraje en el mercado de bienes. En el modelo que desarrolla Frankel se hace depender el tipo de cambio entre dos monedas³, y se estima una forma reducida de un modelo donde la variable endógena es el tipo de cambio y las explicativas son la diferencia entre los dos países considerados en la cantidad de dinero, en la tasa de interés, en el nivel de actividad y en la tasa de inflación.

En nuestro caso hemos seguido, basándonos en esta línea de pensamiento, un camino inspirado en el que siguen Johansen y Juselius (1992), pero adaptándolo a la situación argentina, que es diferente básicamente debido a la elevada tasa de inflación soportada. Además consideramos la relación entre la moneda doméstica y el dólar estadounidense y no a una canasta de monedas, dada la importancia descollante del dólar en nuestra economía y consideramos que los cambios en la inflación y en la cantidad de

³ Este trabajo estudia la relación entre el marco y el dólar estadounidense.

dinero de Estados Unidos eran tan pequeños respecto a los operados en nuestro país que pueden ser omitidos del modelo.

Las variables incluidas en el modelo son las siguientes:

- ◆ $p_1_p_2$ indica la diferencia en los precios al por mayor domésticos con los de Estados Unidos, en índices con bases uniformadas. (Ecuación 1).
- ◆ e_{12} es la cotización del dólar en el mercado libre o paralelo, en moneda doméstica. (Ecuación 2).
- ◆ Δp_1 es la tasa continua de inflación en Argentina, según el IPM (Índice de Precios al por Mayor). (Ecuación 3).
- ◆ $i_1_i_2$ es el diferencial de tasas de interés, tomándose como tales la tasa libre doméstica pasiva a 30 días (i_1) y la tasa del euromercado para el mismo plazo (i_2). (Ecuación 4).
- ◆ m_1 es el valor de la cantidad de dinero para ese agregado. (Ecuación 5).

El período analizado es el transcurrido entre enero 1983 y marzo de 1991 y los datos utilizados son trimestrales.

Los gráficos de los logaritmos naturales de las cinco series y de sus tasas continuas de variación (primeras diferencias logarítmicas) se pueden ver en el Apéndice I.

Se procuró estudiar un período de tipo de cambio libre, o por lo menos en el que el gobierno no ofrece la totalidad de las monedas extranjeras que demandan los agentes económicos, por lo que existe un mercado paralelo de cambios que registra una cotización libre. Comienza, luego de los sobresaltos de 1982, con la crisis de la deuda y la guerra de Malvinas y finaliza luego de la adopción del

tipo de cambio fijo, al adoptarse el sistema de la Ley de Convertibilidad.

Todas las variables están tomadas en logaritmos naturales, incorporándose al modelo variables ficticias estacionales, así como dos variables ficticias, con valor unitario para cada observación de cada uno de los dos períodos de hiperinflación y cero durante el resto del tiempo.

III. NATURALEZA DEL MODELO ECONOMETRICO UTILIZADO.

Se aplica un modelo en corrección de errores que permite capturar los procesos de ajuste de corto plazo y los de largo plazo simultáneamente.

Su formulación estadística se obtiene partiendo de un proceso autorregresivo p-dimensional X_t con k rezagos definido por

$$[1] \quad X_t = \Pi_1 X_{t-1} + \Pi_2 X_{t-2} + \dots + \Pi_k X_{t-k} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

Reparametrizando [1] como un modelo en corrección de errores, se obtiene la siguiente formulación

$$[2] \quad \Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

con

$$\Gamma_i = - \sum_{j=i+1}^k \Pi_j \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$\Pi = \sum_{j=1}^k \Pi_j - I$$

donde el término ΠX_{t-1} contiene las relaciones de largo plazo.

Un análisis detallado del procedimiento estadístico utilizado se incluye en el Apéndice III.

IV. RESULTADO DE LAS ESTIMACIONES.

Partimos del modelo definido en [2]. Hemos supuesto que los datos presentan tendencia determinística, la que desaparece al diferenciarse la serie, y que su grado de integración es, a lo sumo, $I(1)$ dada la inspección de los gráficos de las variables.

Para seleccionar el número de rezagos se prefirió un método "sui-generis": se estimó el modelo aplicando el método en dos etapas de Engle-Granger y se aplicó el test de máxima verosimilitud, consistente en comparar los logaritmos de los determinantes de las matrices de errores de los sistemas restringido y no restringido. En este caso se efectuaron distintas comparaciones y se eligió un modelo con cinco rezagos en el modelo en diferencias, o sea de seis rezagos en el modelo definido en [1], para lo que se aplicó el test de máxima verosimilitud corregido por grados de libertad.⁴

Luego estimamos el modelo irrestricto suponiendo que todos los vectores de cointegración incluían un término de tendencia determinística.

En la Tabla 1 presentamos los estadísticos analizados para determinar el rango reducido.

Tabla 1. Estadísticos del test de rango reducido

Autovalores	L-max	Traza	$H_0: r$	p-r
0.4124	49.46	132.53	0	5
0.3494	39.67	83.08	1	4
0.2326	24.63	43.11	2	3
0.1704	17.38	18.48	3	2

⁴ Debe tenerse presente que la limitación de los grados de libertad, debido a que se utilizan 25 parámetros en cada ecuación, reduce la eficiencia de los estimadores en forma considerable.

En las Tablas 2, 3 y 4 presentamos las matrices estimadas para β' , α y Π respectivamente obtenidas a partir de la estimación del modelo irrestricto.

Tabla 2. Matriz β'

$p_1_{p_2}$	e_{12}	Δp_1	$i_1_{i_2}$	m_1	trend
-10.121	1.005	-163.391	1.833	9.099	0.033
-1.402	0.869	-202.970	5.455	-0.297	0.101
-10.573	12.419	1.434	1.988	-0.461	-0.146
-0.267	7.068	-361.195	-1.310	-7.112	0.072
-6.068	7.507	196.308	-1.638	-1.720	0.028

Tabla 3. Matriz α

-0.023	0.017	0.015	-0.003	0.003
-0.022	0.038	-0.017	-0.013	0.002
-0.022	0.017	0.014	-0.001	0.003
-0.017	-0.008	-0.041	-0.048	0.022
-0.029	-0.001	0.001	0.006	-0.001

Tabla 4. Matriz Π

$p_1_{p_2}$	e_{12}	Δp_1	$i_1_{i_2}$	m_1	trend
0.031	0.179	1.937	0.078	-0.203	-0.001
0.342	-0.274	0.805	0.147	-0.119	0.005
0.028	0.183	1.254	0.079	-0.206	-0.001
0.493	-0.711	26.001	-0.127	0.177	0.002
0.282	0.019	2.630	-0.063	-0.300	-0.001

El análisis de los residuos que figura en la Tabla 5, nos permite aceptar que los errores soportan la hipótesis de normalidad⁵.

Tabla 5. Análisis residual - Estadísticos univariados

STD.DEV	SKEWNESS	KURTOSIS	MAXIMUM	MINIMUM	ARCH(6)	Normality	R ²
0.0554	-0.0368	2.9553	0.1580	-0.1454	2.826	0.229	0.910
0.0769	0.0587	2.9428	0.2210	-0.1735	5.980	0.231	0.826
0.0548	-0.0746	2.9413	0.1544	-0.1455	2.689	0.256	0.876
0.2497	-0.3951	3.2903	0.5452	-0.6685	4.150	2.741	0.662
0.0377	0.5594	3.4256	0.1211	-0.0758	8.381	4.987	0.933

De los resultados obtenidos, se puede suponer que existen tres relaciones de cointegración⁶, de las cuales una estaría dada por el carácter estacionario de la variable Δp_1 .

Finalmente, se trabajó sólo con dos vectores de cointegración, porque se realizó un test de sensibilidad, incorporando esta tercera relación de cointegración y los resultados no sufrieron modificaciones.

Las estimaciones para $r=2$ se presentan en las Tablas 6, 7 y 8.

Tabla 6. Matriz β'

p_1_p2	e_{12}	Δp_1	i_1_i2	m_1	trend
-10.073	1.000	-162.627	1.825	9.056	0.032
4.729	-2.931	684.443	-18.395	1.000	-0.341

⁵ El test de normalidad utilizado se puede ver en Hansen y Juselius (1995). Debe tenerse presente que el coeficiente de kurtosis no mide el exceso sino el nivel.

Tabla 7. Matriz α Valores "t" para α

Δp_{1_p2}	-0.023	-0.005	-3.943	-2.931
Δe_{12}	-0.022	-0.011	-2.781	-4.779
$\Delta^2 p_1$	-0.022	-0.005	-3.852	-3.033
Δi_{1_i2}	-0.017	0.002	-0.639	0.301
Δm_1	-0.029	0.000	-7.302	0.298

Tabla 8. Matriz Π

	p_{1_p2}	e_{12}	Δp_1	i_{1_i2}	m_1	trend
Δp_{1_p2}	0.206	-0.008	0.285	0.050	-0.211	0.001
Δe_{12}	0.171	0.011	-4.113	0.167	-0.213	0.003
$\Delta^2 p_1$	0.198	-0.007	0.079	0.054	-0.205	0.002
Δi_{1_i2}	0.178	-0.023	4.285	-0.073	-0.148	-0.001
Δm_1	0.291	-0.030	4.903	-0.059	-0.260	-0.001

Luego procedimos a testear las relaciones de cointegración, y para ello aplicamos las siguientes restricciones lineales a β

$$[3] \quad \beta = (H_1 \varphi_1, H_2 \varphi_2)$$

donde

$$[4] \quad H'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

⁶ Las tablas utilizadas corresponden a una distribución asintótica del estadístico, por lo que deben analizarse con cautela cuando se trabaja con muestras pequeñas.

$$[5] \quad H_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta hipótesis implica que tenemos dos ECM (Mecanismos de Corrección de Errores): uno es el definido por el tipo de cambio y los precios en Argentina y Estados Unidos, que representa el desequilibrio entre el tipo de cambio y el precio relativo de los bienes en el mercado doméstico y el externo, y el segundo está definido por el desequilibrio entre el tipo de cambio y lo que sucede en el mercado financiero, representado éste por el diferencial de tasas de interés y la cantidad de dinero⁷.

En el primero de los ECM se restringió m_1 y el término de tendencia, mientras que en el segundo se restringieron p_1 , p_2 y Δp_1 .

En el primero el vector fue normalizado sobre e_{12} y en el segundo sobre m_1 .⁸

La hipótesis que analizamos consiste en el hecho de que si crece la cantidad de dinero y este crecimiento no es absorbido por el crecimiento de la tasa de interés doméstica, el excedente de dinero no demandado se esterilizará a través del sector externo y, dado que existen cambios libres, mediante un incremento de valor del dólar.

Los resultados que obtuvimos pueden verse en las tablas 9, 10, 11 y 12. La convergencia se obtuvo luego de 30 iteraciones,

⁷ De esta manera incorporamos los dos elementos a que hacemos referencia más arriba, que emergen de los modelos de Frankel y Dornbush que citamos antes. Es decir que se modifica el concepto de UIP definido más arriba al incorporarse al ECM la variable m_1 .

obteniéndose un valor para la hipótesis del modelo restringido versus la hipótesis nula del sistema no restringido de $\text{CHISQ}(2)=4.04$, con valor p igual a 0.13, lo que permite aceptar la restricción incorporada.

Tabla 9. Matriz β'

$p_1_{p_2}$	e_{12}	Δp_1	$i_1_{i_2}$	m_1	trend
-1.023	1.000	-20.104	1.687	0.000	0.000
0.000	-0.990	0.000	-1.586	1.000	0.005

Tabla 10. Matriz α Valores "t" para α

$\Delta p_1_{p_2}$	-0.108	-0.169	-1.826	-3.413
Δe_{12}	-0.036	-0.133	-0.408	-1.801
$\Delta^2 p_1$	-0.101	-0.162	-1.716	-3.289
$\Delta i_1_{i_2}$	-0.211	-0.165	-0.771	-0.718
Δm_1	-0.274	-0.251	-6.589	-7.189

Tabla 11. Matriz Π

	$p_1_{p_2}$	e_{12}	Δp_1	$i_1_{i_2}$	m_1	trend
$\Delta p_1_{p_2}$	0.110	0.060	2.168	0.086	-0.169	-0.001
Δe_{12}	0.037	0.096	0.725	0.151	-0.133	-0.001
$\Delta^2 p_1$	0.103	0.060	2.024	0.087	-0.162	-0.001
$\Delta i_1_{i_2}$	0.216	-0.048	4.249	-0.095	-0.165	-0.001
Δm_1	0.280	-0.026	5.507	-0.065	-0.251	-0.001

⁸ Volvimos a intentar una tercera relación de cointegración sobre la tercera variable, pero los resultados no sufrieron alteraciones importantes.

Tabla 12. Valores "t" para Π

1.826	2.981	1.826	2.434	-3.413	-3.413
0.408	3.212	0.408	2.846	-1.801	-1.801
1.716	3.000	1.716	2.468	-3.289	-3.289
0.771	-0.516	0.771	-0.577	-0.718	-0.718
6.589	-1.819	6.589	-2.586	-7.189	-7.189

En el Apéndice II se incluyen los gráficos de algunos resultados, tales como: logaritmos naturales de los datos y valores ajustados, residuos standarizados, histograma de los residuos standarizados y correlograma de los residuos para cada una de las cinco series consideradas.

Realizamos varias pruebas aplicando restricciones distintas a los vectores de cointegración, integrando éstos de diferentes maneras, pero los resultados que obtuvimos fueron muy similares y resolvimos elegir las restricciones que estuvieron inspiradas en consideraciones económicas y no sólo estadísticas.

Los resultados obtenidos son satisfactorios, y en alguna medida, sorprendentes. Si analizamos el comportamiento de los valores de α , que indican la velocidad del ajuste, vemos que el primer ECM resulta significativo al 10% en tres de las cinco ecuaciones, mientras que el segundo ECM resulta significativo al 5% en cuatro de las ecuaciones (en todas excepto en la cuarta). Resulta lógico que no resulten significativos en la cuarta ecuación debido al componente exógeno de esta variable (i_1 - i_2).

La lectura de la matriz estimada Π (Tabla 11) y de los tests "t" respectivos (Tabla 12) nos muestra que casi todos los valores resultan significativos al 10%, con la excepción de la ecuación precitada.

Se realizó el test de Wald definido en Hansen y Juselius (1995) para cada uno de los parámetros β y pudimos comprobar que todos ellos resultaron ser significativamente distintos de cero. Por otra parte se verificó que el coeficiente correspondiente a $p_1_{p_2}$ en el primer vector de cointegración y el correspondiente a e_{12} en el segundo no resultaron significativamente diferentes de uno.

En la Tabla 13 se muestran los coeficientes de determinación y el análisis univariado de los residuos para el modelo restringido y, como puede verse, las diferencias con las que se transcriben más arriba son casi insignificantes. Los coeficientes de determinación son elevados en todos los casos e indican un ajuste satisfactorio del modelo, mientras que los errores parecen comportarse razonablemente.

Tabla 13. Análisis residual - Estadísticos univariados

STD.DEV	SKEWNESS	KURTOSIS	MAXIMUM	MINIMUM	ARCH(6)	Normality	R ²
0.0538	-0.1122	3.0414	0.1451	-0.1460	5.065	0.567	0.915
0.0804	0.2503	3.5316	0.2733	-0.1761	5.679	2.942	0.809
0.0534	-0.1414	3.0410	0.1418	-0.1453	4.551	0.649	0.882
0.2496	-0.3966	3.2525	0.5357	-0.6647	4.215	2.701	0.663
0.0378	0.5713	3.4916	0.1237	-0.0754	8.899	5.158	0.932

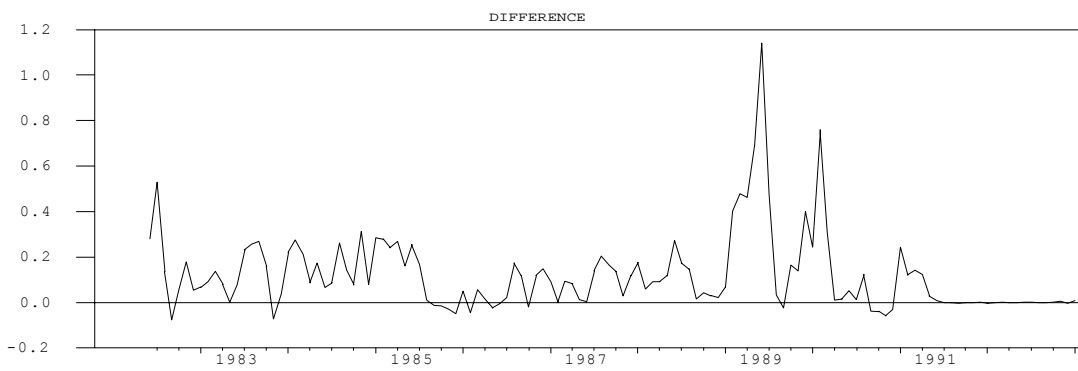
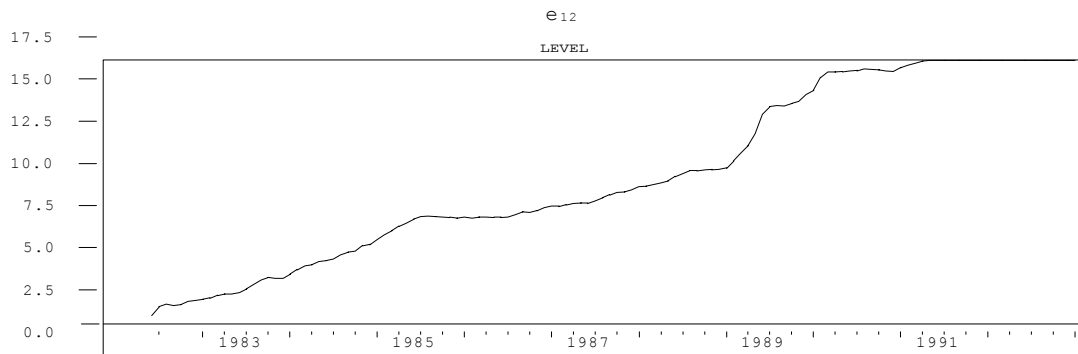
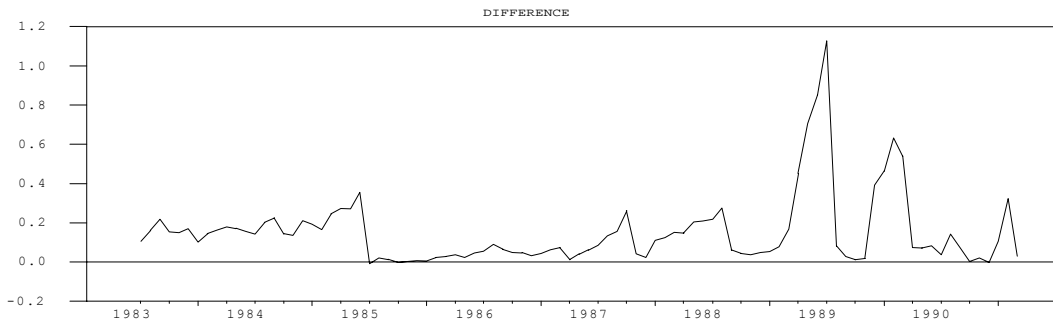
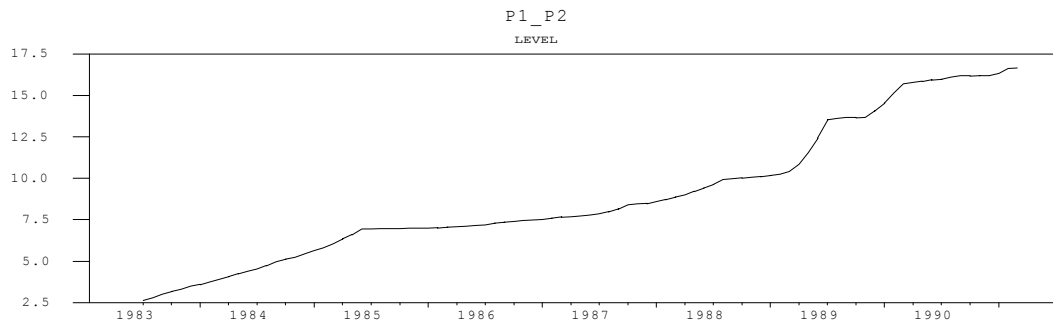
Como se ha detallado anteriormente se incluyeron dos variables ficticias para captar el efecto de los dos periodos hiperinflacionarios ocurridos en 1989 y 1990 y once para captar la estacionalidad. Las primeras resultaron significativas prácticamente en todas la ecuaciones. Las segundas resultaron significativas sólo en algunos casos, especialmente en la ecuación ue explica a la variable m_1 .

V. CONCLUSIONES

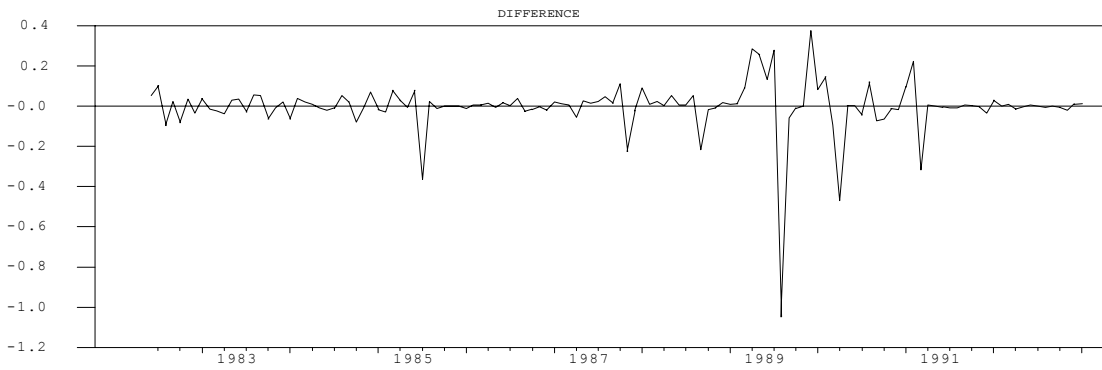
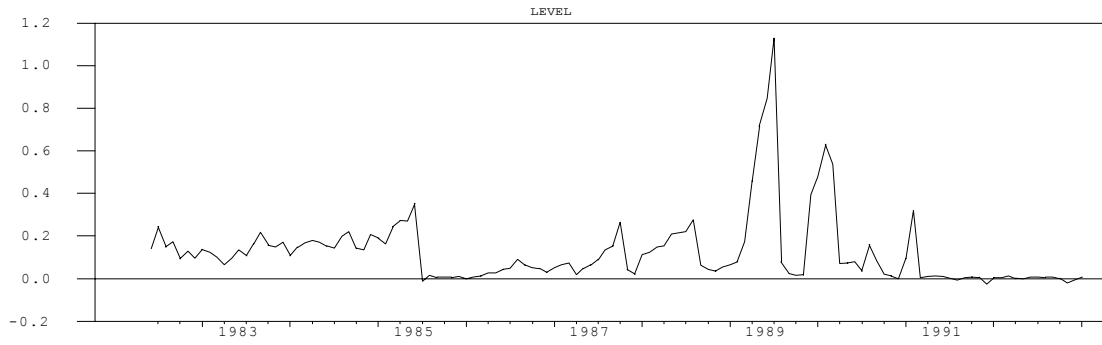
El estudio realizado permite concluir que el análisis de las variables consideradas debe hacerse en forma simultánea, porque tiene una rica estructura dinámica que debe ser tomada en cuenta a la hora de evaluar las teorías sobre su comportamiento. Los elementos de largo plazo, expresados en las relaciones de cointegración, deben incluirse conjuntamente con los de corto plazo para poder reunir ambos elementos en el modelo. Los desequilibrios en el mercado de bienes y financiero influyen en los cambios en la PPP, mientras que éstos últimos actúan sobre las variaciones en el tipo de cambio. Ambos influyen sobre las modificaciones en la tasa de inflación y en la cantidad de dinero, al par que los elementos de corto plazo, junto con algunas variables determinísticas completan el cuadro de variables explicativas. Todas las variables aparecen como interrelacionadas, con efectos recíprocos entre ellas.

En síntesis, nuestros estudios anteriores, que sostenían que el dinero tiene un rol activo además de comportarse pasivamente en el proceso inflacionario, parecen confirmarse a la luz de estos resultados. Serán necesario continuar estos estudios para poder mejorar nuestro conocimiento tanto teórico como empírico.

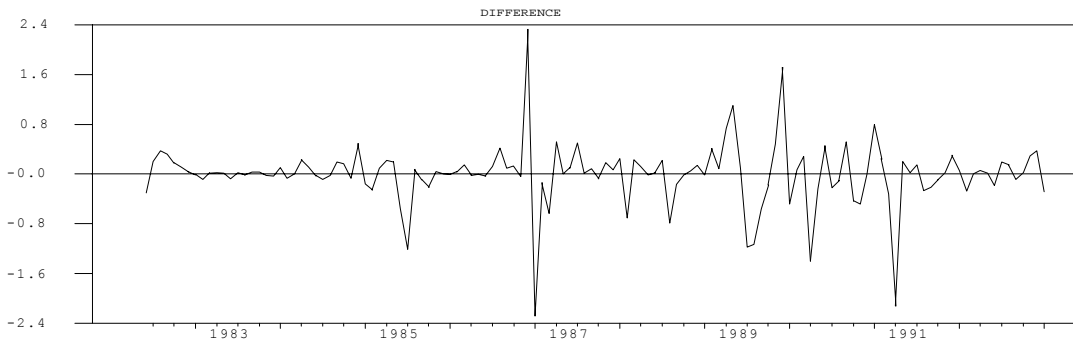
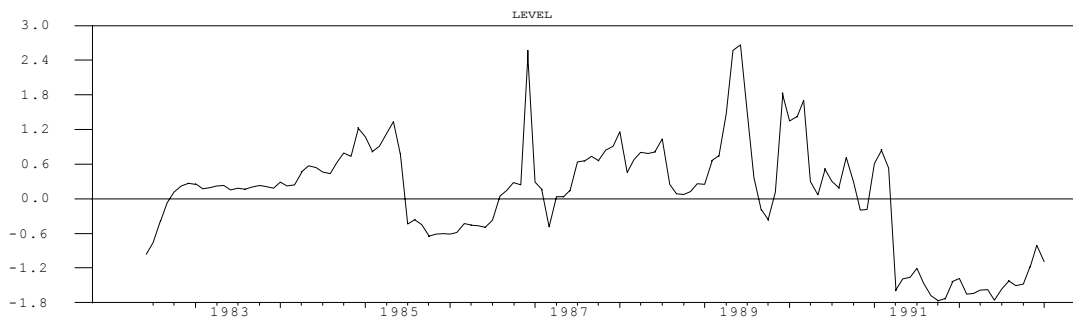
APENDICE I: Logaritmos naturales de datos en niveles y diferencias.

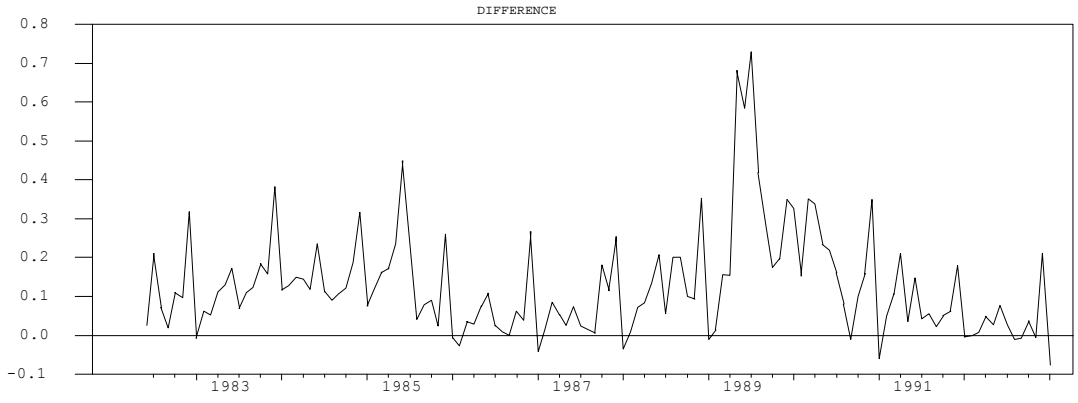
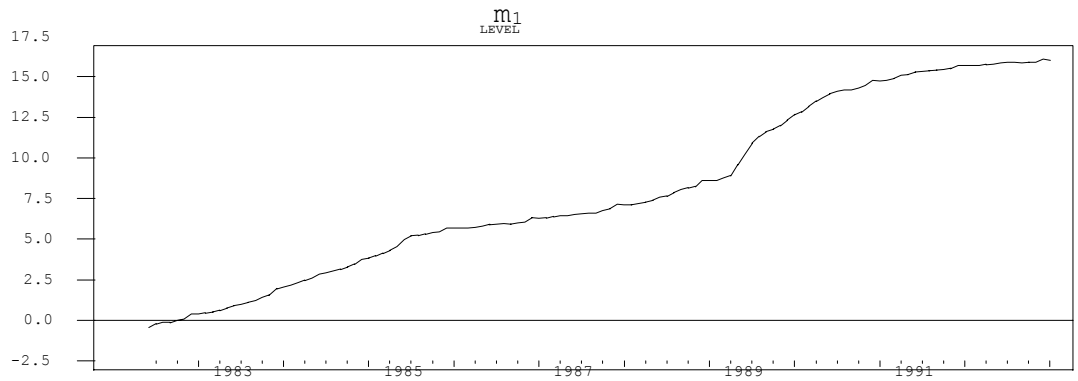


Δp_1

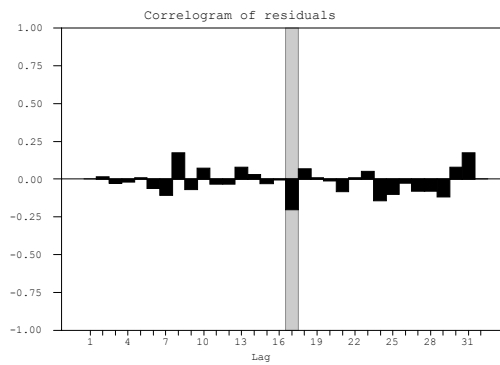
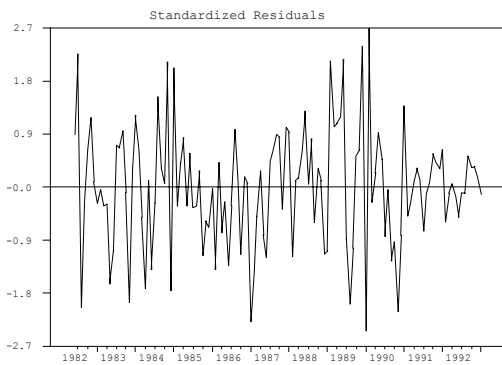
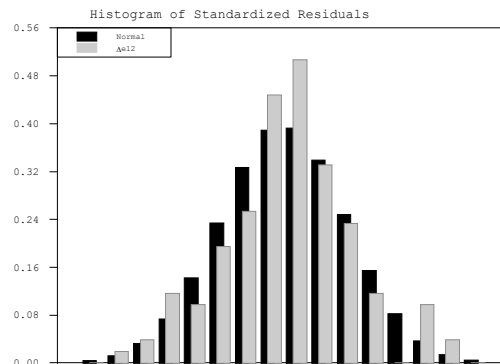
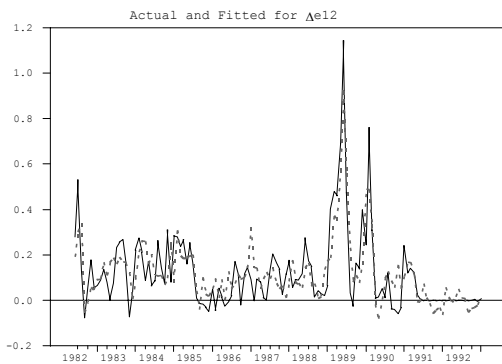
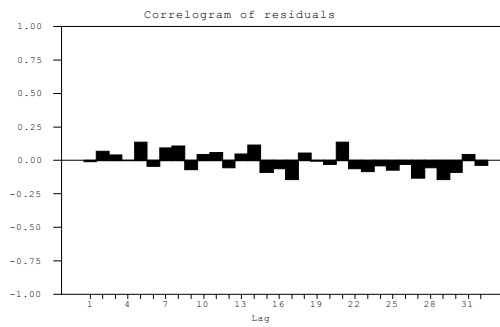
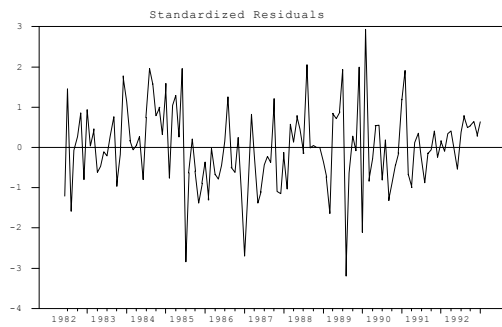
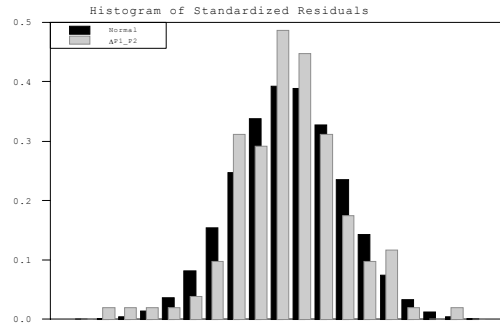
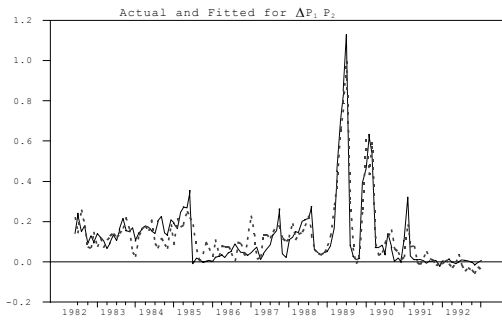


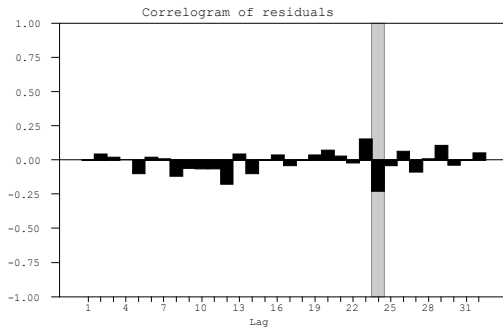
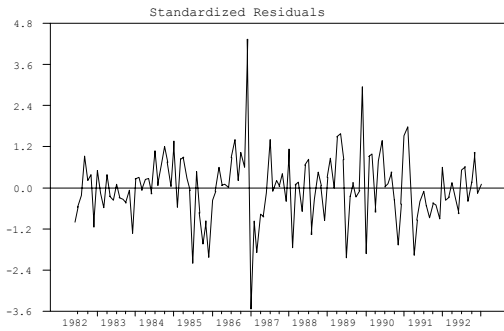
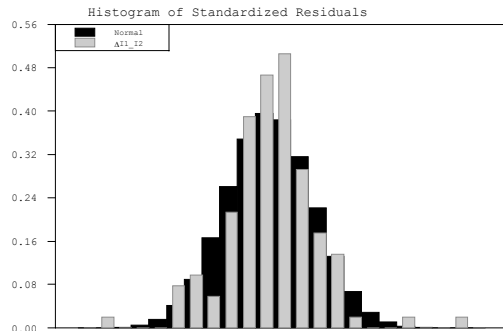
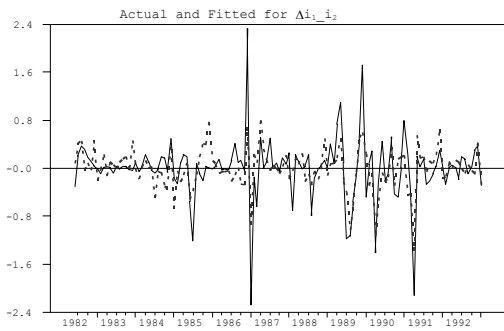
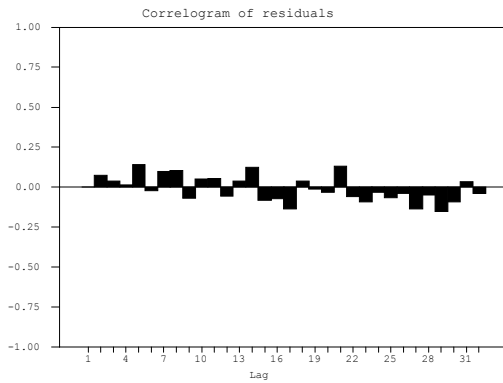
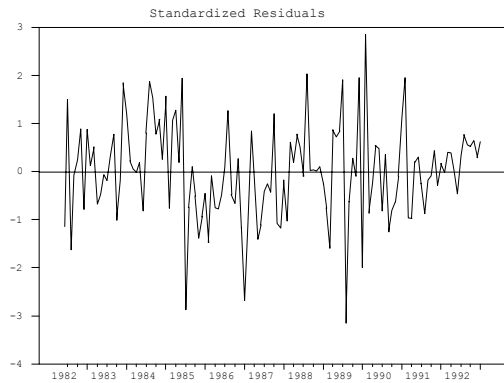
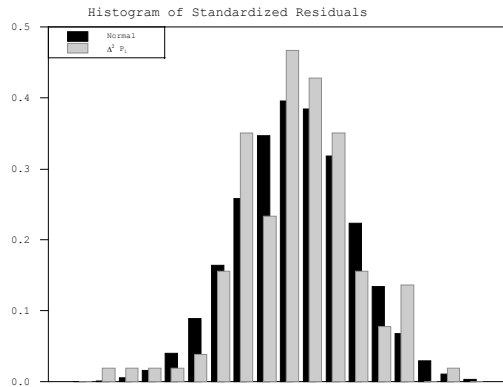
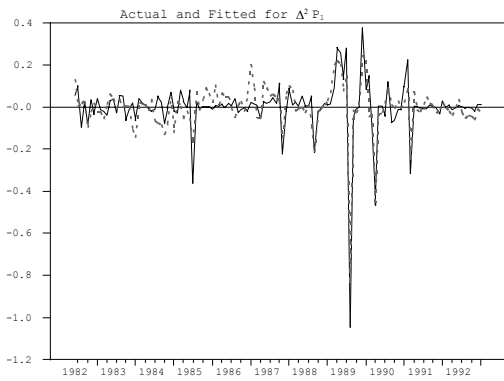
$i_1 - i_2$

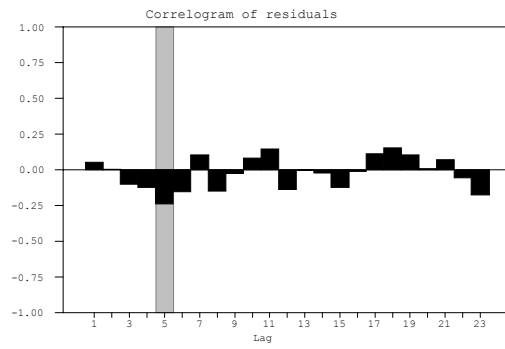
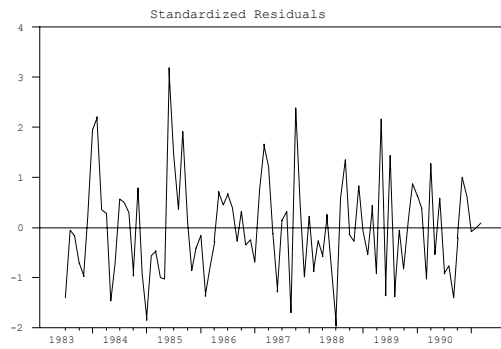
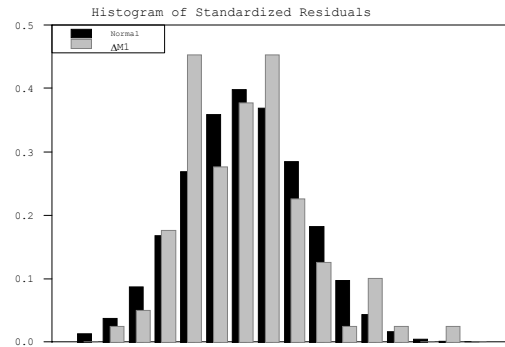
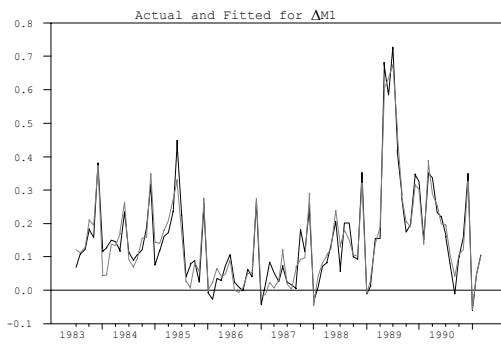




APENDICE II: Análisis gráfico de algunos de los resultados obtenidos.







APENDICE III.

a.- El modelo estadístico.

Sea el proceso autorregresivo p-dimensional X_t con k rezagos definido por

$$[1] \quad X_t = \Pi_1 X_{t-1} + \Pi_2 X_{t-2} + \dots + \Pi_k X_{t-k} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

para valores fijos de X_{-k+1}, \dots, X_0 y errores independientes ε_t idénticamente distribuidos como $N(0, \Omega)$.

El término determinístico D_t puede contener una constante, tendencia lineal, variables dummies estacionales, dummies de intervención y otros regresores considerados fijos y no estocásticos.

Reparametrizando [1] como un modelo en corrección de errores, se obtiene la siguiente formulación .

$$[2] \quad \Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= - \sum_{j=i+1}^k \Pi_j & i &= 1, \dots, k-1 \\ \Pi &= \sum_{j=1}^k \Pi_j - I \end{aligned}$$

La mayoría de las series económicas son procesos no estacionarios y al diferenciar el vector de variables de un sistema VAR, generalmente se pierde la información relativa a las relaciones de largo plazo entre las variables.

Para determinar si Π contiene información sobre las relaciones de las variables del vector en el largo plazo consideraremos los tres casos posibles bajo el supuesto que Δx_t es estacionario.

i) $\text{Rango}(\Pi) = p$, es decir que la matriz Π es de rango completo y por lo tanto X_t es estacionario.

ii) $\text{Rango}(\Pi) = 0$ implica $\Pi = 0$, por lo tanto X_t es no estacionario y [2] es un modelo tradicional VAR en primeras diferencias.

iii) $0 < \text{Rango}(\Pi) < p$, en este caso X_t es no estacionario, entonces existen matrices $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}^{p \times r}$ tales que $\Pi = \alpha\beta'$ y $\beta' X_t$ es estacionario.

b.- Estimación de los parámetros por el método de máxima verosimilitud.

Consideremos el modelo [2] siendo irrestricto el espacio de parámetros $(\Pi, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \Phi, \Omega)$.

Para simplificar la notación de [2] definimos

$$Z_{0t}, Z_{1t} \in \mathfrak{R}^p \text{ tales que } Z_{0t} = \Delta x_t, Z_{1t} = X_{t-1}$$

y

$$Z_{2t} \in \mathfrak{R}^{p(k-1)+m}, \quad Z_{2t} = \begin{bmatrix} \Delta X_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta X_{t-k+1} \\ D_t \end{bmatrix}$$

Sea, además, Ψ la matriz de parámetros correspondiente a Z_{2t} formada por $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}$ y Φ , de dimensión $p \times (p(k-1) + m)$.

Simplificamos la expresión [2] aplicando la nueva notación y reemplazamos Π , bajo la hipótesis $H : \Pi = \alpha \beta'$, obteniendo

$$[3] \quad Z_{0t} = \alpha \beta' Z_{1t} + \Psi Z_{2t} + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T$$

que es equivalente a

$$[4] \quad \Delta X_t = \alpha \beta' X_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \Phi D_t + \varepsilon_t, \quad t=1, \dots, T$$

en la notación primitiva.

La expresión resultante es una regresión no-lineal, donde Ψ es una matriz de parámetros irrestrictos. Los parámetros α y β son restringidos estando sujetos a la restricción $\Pi = \alpha \beta'$.

Este tipo de modelo se estima aplicando el método de rango reducido .

También surge un problema de identificación (ver Banerjee A. et al) resultante de la naturaleza de la restricción impuesta, ya que los estimadores obtenidos no serán únicos. Un caso simple de no-unicidad se presenta cuando algún subconjunto de X_i está cointegrado.

Por lo tanto , para toda matriz no singular $F \in \mathcal{R}^{r \times r}$ se cumple que $F \alpha \beta' = \alpha^* \beta'$ es también $I(0)$, o sea estacionaria .

Por lo tanto toda combinación lineal de vectores cointegrados es una combinación cointegrada.

Expresado en términos del álgebra lineal, la dimensión del espacio de cointegración (dado por el rango de la matriz β) es r y las columnas de β generan una base de dicho espacio vectorial.

Por tanto, la matriz β no será única en ausencia de información a priori.

Se calculan las regresiones de ΔX_t y X_{t-1} sobre las diferencias rezagadas $\Delta X_{t-1}, \dots, \Delta X_{t-k+1}$ y D_t , obteniéndose los respectivos residuos R_{0t} y R_{1t} y las matrices S_{ij} de los momentos cruzados

$$S_{ij} = T^{-1} \sum_{t=1}^T R_{it} R_{jt}' \quad i, j = 0, 1$$

Por otra parte, los residuos mencionados están ligados por la relación

$$[5] \quad R_{0t} = \alpha \beta' R_{1t} + \hat{\varepsilon}_t$$

Por tanto, para un β fijo, los estimadores de α y Ω en la ecuación [5] serán

$$[6] \quad \hat{\alpha}(\beta) = S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1}$$

$$[7] \quad \hat{\Omega}(\beta) = S_{00} - S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1} \beta' S_{10} = S_{00} - \hat{\alpha}(\beta) (\beta' S_{11} \beta) \hat{\alpha}(\beta)'$$

Aplicando la proposición que afirma que: si X_1, \dots, X_T son variables normales p -dimensionales independientes idénticamente distribuidas $N(\xi, \Omega)$ entonces el máximo de la función de verosimilitud está dado por $L_{\max}^{-2/T} = (2\pi e)^p \left| \hat{\Omega} \right|$.

Haciendo $(2\pi e)^p = c$, el máximo de la función de verosimilitud de [4], dado β , es

$$\begin{aligned}
[8] \quad L_{\max}^{-2/T}(\hat{\alpha}(\beta), \beta, \hat{\Omega}(\beta)) &= c \left| \hat{\Omega}(\beta) \right| \\
&= c \left| S_{00} - S_{01} \beta (\beta' S_{11} \beta)^{-1} \beta' S_{10} \right| \\
&= c \left| S_{00} \right| \left| \beta' (S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}) \beta \right| / \left| \beta' S_{11} \beta \right|
\end{aligned}$$

La maximización de la función de verosimilitud es equivalente a la minimización de

$$[9] \quad \left| \beta' (S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}) \beta \right| / \left| \beta' S_{11} \beta \right|$$

ya que $\left| S_{00} \right|$ es constante.

Para hallar el mínimo, procedemos imponiendo la restricción de normalización

$$[10] \quad \left| \beta' S_{11} \beta \right| = I$$

Estamos en presencia de una problema de extremos restringidos

$$[11] \quad \left| \beta' (S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}) \beta \right| \quad \text{sujeto a} \quad \left| \beta' S_{11} \beta \right| = I$$

Esto implica encontrar el punto de ensilladura del Langragiano Φ

$$[12] \quad \left| \beta' (S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}) \beta \right| - \Phi \left[\text{traza} \left(\left| \beta' S_{11} \beta \right| - I \right) \right]$$

El problema de minimización se ha convertido en un problema de autovalores

$$\left| \rho S_{11} - (S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}) \right| = 0$$

que, haciendo $\lambda = 1 - \rho$, es equivalente a resolver

$$\left| \lambda S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} \right| = 0$$

Este problema tiene p soluciones, $1 > \hat{\lambda}_1 > \dots > \hat{\lambda}_p > 0$, con sus correspondientes autovectores $\hat{V} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_p)$ normalizados por $\hat{V}' S_{11} \hat{V} = I_p$.

El estimador de máxima verosimilitud de β , bajo la hipótesis de rango reducido, es

$$\hat{\beta} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_r)$$

Con esta elección de $\hat{\beta}$, y aplicando el siguiente resultado del álgebra :

Sean $M, N \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ tales que M es una matriz simétrica y semidefinida positiva y N es simétrica y definida positiva. Entonces la función $f(x) = |x'Mx|/|x'Nx|$ es maximizada entre todas las matrices $p \times r$ por $\hat{x} = (v_1, \dots, v_r)$ y el valor máximo es $\prod_{i=1}^r \lambda_i$ donde λ_i y v_i son soluciones del problema $|\lambda N - M| = 0$ donde se supone que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$.

La función de máxima verosimilitud [8] puede expresarse como

$$[13] \quad L_{\max}^{-2/T}(\beta) = c |S_{00}| \prod_{i=1}^r (1 - \hat{\lambda}_i)$$

con

$$\hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta} = I \quad \text{y} \quad \hat{\beta}' S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} \hat{\beta} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_r)$$

Una vez estimados β y α estamos en condiciones de estimar los parámetros de corto plazo Γ_i $i = 1, \dots, k-1$.

c.- Determinación del rango de Π

Si existen relaciones de cointegración entre las variables, el número de vectores de cointegración será igual al rango de la matriz Π , o sea igual al número de autovalores de Π distintos de cero.

Para testear el número de autovalores no significativamente distintos de uno, hemos aplicado el test traza donde se formula la hipótesis nula que el número de vectores de cointegración es menor a igual que r

$$H_0: \text{rango} (\Pi) \leq r$$

vs

$$H_1: \text{rango} (\Pi) > r$$

El estadístico se construye como el cociente entre las funciones de verosimilitud maximizadas

$$Q(H(r)|H(p))^{-\frac{2}{T}} = \frac{c|S_{00}|^{\prod_{i=1}^r (1-\hat{\lambda}_i)}}{c|S_{00}|^{\prod_{i=1}^p (1-\hat{\lambda}_i)}}$$

Simplificando y aplicando logaritmos se obtiene el estadístico del test traza

$$[14] \quad -2\log Q(H(r)|H(p)) = -T \sum_{i=r+1}^p \log(1-\hat{\lambda}_i)$$

La distribución asintótica del estadístico del test, bajo la hipótesis nula, varía dependiendo de las componentes determinísticas del modelo y del número de componentes no estacionarias $(n-r)$.

d.- Restricciones sobre β .

Consideremos el modelo definido en [2] con las restricciones

$$[15] \quad \beta = (H_1 \phi_1, H_2 \phi_2)$$

donde $H_i \in \mathfrak{R}^{p \times s_i}$ y $\phi_i \in \mathfrak{R}^{s_i \times r_i}$ $i = 1, 2$.

Se descompone la matriz α en forma análoga

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \alpha_i \in \mathfrak{R}^{s_i \times r_i} \text{ con } i = 1, 2 .$$

Entonces el producto $\alpha\beta'$ queda expresado como

$$\alpha \beta' = [\alpha_1 \quad \alpha_2] \begin{bmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \end{bmatrix} = [\alpha_1 \quad \alpha_2] \begin{bmatrix} \phi_1' H_1' \\ \phi_2' H_2' \end{bmatrix} = \alpha_1 \phi_1' H_1' + \alpha_2 \phi_2' H_2'$$

Reemplazando en [5]

$$[16] \quad R_{0t} = (\alpha_1 \phi_1' H_1' + \alpha_2 \phi_2' H_2') R_{1t} + \hat{\epsilon}_t \\ = \alpha_1 \phi_1' H_1' R_{1t} + \alpha_2 \phi_2' H_2' R_{1t} + \hat{\epsilon}_t$$

Este problema presenta dos condiciones de rango reducido y se resuelve aplicando el siguiente algoritmo convergente:

1. Se estima β en forma irrestricta, como se indica en b.-, y se

construye un estimador inicial $\hat{\beta}_1$ resolviendo el siguiente

$$\text{problema de autovalores } |\lambda \hat{\beta}' \hat{\beta} - \hat{\beta}' H_1 (H_1' H_1)^{-1} H_1' \hat{\beta}| = 0$$

2. De esta manera se selecciona un valor inicial $\hat{\beta}_1$ tan próximo al espacio generado por H_1 como sea posible ya que el algoritmo no asegura que el extremo hallado sea un máximo absoluto.

3. Para un $\beta_1 = \hat{\beta}_1$ fijo, se estiman α_2 y ϕ_2 mediante una regresión de rango reducido de R_{0t} sobre $H_2' R_{1t}$ corregida por $\beta_1' R_{1t}$. Se define

$$\text{así el estimador } \hat{\beta}_2 = H_2 \hat{\phi}_2 .$$

4. Para un $\beta_2 = \hat{\beta}_2$ fijo, se estiman α_1 y φ_1 como una regresión de rango reducido de R_{0t} sobre $H_1' R_{1t}$ corregida por $\beta_2' R_{1t}$. Se define así el estimador $\hat{\beta}_1 = H_1 \hat{\varphi}_1$.
5. Se aplican en forma iterativa los pasos 2. y 3. hasta que el proceso converge. Es importante destacar que no se puede afirmar que existe un único máximo, por lo tanto no podemos demostrar que el método converge a dicho valor. Sin embargo se puede afirmar que la función de verosimilitud se maximiza en cada paso.

El valor de la función de verosimilitud maximizada está dado por

$$[17] \quad L_{\max}^{-2/T} = c |S_{00}| \prod_{i=1}^{r_1} (1 - \hat{\rho}_i) \prod_{i=1}^{r_2} (1 - \hat{\lambda}_i)$$

donde $1 > \hat{\lambda}_1 > \dots > \hat{\lambda}_{s_2}$ están definidos como solución del problema de autovalores para $\beta_1 = \hat{\beta}_1$ y $1 > \hat{\rho}_1 > \dots > \hat{\rho}_{s_1}$ están definidos como solución del problema de autovalores para $\beta_2 = \hat{\beta}_2$.

El resultado obtenido en [17] permite calcular los tests relativos a las restricciones sobre las relaciones de cointegración.

REFERENCIAS

Aubone, A., Navarro, A. y Oppezzi, C. (1988), "Aplicación de filtros Kalman a la estimación de un modelo para la inflación argentina", Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, 73-86.

Banerjee, A., Dolado, J., Galbraith J.W., Hendry, D. (1993), "Cointegration, error-correction, and the econometric analysis of non-stationary data". Oxford University Press: New York.

Dornbusch, R. (1976), "Expectations and exchange rate dynamics". Journal of Political Economy". 1161-1176.

Enders, W. (1995), "Applied econometric time series", John Wiley and Sons: New York.

Frankel, O.J.A, (1979), "On the mark: a theory of floating exchange rates based on real interest differentials". American Economic Review 69, 610-622.

Hansen, H. y Juselius, K. (1995), "Cats in Rats". Estima: Evanston.

Johansen, S. (1995), "Likelihood-based inference in cointegrated vectors autorregresive models". Oxford University Press: New York.

Johansen, S. y Juselius, K. (1990), "Maximum likelihood estimation and inference of cointegration with applications to the demand for money". Oxford Bulletin of Economics and Statistics 52, 2 169-210.

Johansen, S. y Juselius, K. (1992), "Testing estructural hypothesis in a multivariate analysis of the PPP and the UIP for UK". Journal of Econometrics 53, 211-244.

Navarro, A. (1990), "Dinero, precios y endeudamiento interno en Argentina". Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, 191-209.

Navarro, A. y Balacco, H. (1988), "El proceso inflacionario argentino 1978-1986: un estudio econométrico". Revista Brasileira de Econometría, año 7, 1 21-44.

Navarro, A. (1993) "Efectos de la inflación sobre el nivel de actividad: la experiencia argentina", Revista Económica. La Plata vol. XXXIX. nros 1-2. 87-110.